Versuch 241 - RLC -Glied

PAP 2.2

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **4**

Kurs: **Diensttag**

Inhaltsverzeichnis

0 Messprotokoll **1**

1 Einleitung **6**

1.1 Motivation 6
1.2 Grundlagen aus der Physik 6
1.2.1 RC-Glied 6
1.2.2 Impedanzen 6
1.2.3 Hoch- und Tiefpassfilter 7
1.2.4 Differenzier- und Intigrierglied 8
1.2.5 RCL-Schwingkreis 9
1.2.6 Resonanz des RLC-Schwingkreises 11
1.2.7 Parallelschwingkreis 13
1.2.8 AM-Radio 13

2 Auswertung **15**

2.1 Aufgabe 1 15
2.2 Aufgabe 2 15
2.2.1 Integrator 15
2.2.2 Differentiatior 16
2.3 Aufgabe 3 17
2.4 Aufgabe 4 19
2.5 Aufgabe 5 21
2.6 Aufgabe 6 22
2.7 Aufgabe 7 23
2.8 Aufgabe 8 24

3 Zusammenfassung und Diskussion **27**

3.1 Diskussion 27
3.2 Fazit 27

0. Messprotokoll

Messprotokoll 241: RLC-Glieder

03.12.24
Harish Mahendran
Jonas Schweer

I Messaufbau

- PC- gesteuerter Funktiongenerator und Speicheroszilloskop
- Widerstände, Spulen, Kondensatoren und eine Diode
- Steckbrett zum Aufbau von Schaltungen
- Impedanzwandler mit Netzteil
- Niederfrequenz- Verstärker mit Netzteil
- Langdrahtantenne, Erdleitung
- Zwei Kopfhörer mit unterschiedlicher Impedanz
- Computer

Aufgabe 1: Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Glieds

Um die Zeitkonstante zu messen, schalten wir einen ohmschen Widerstand (1kΩ) und einen Kondensator (470nF). Wir greifen den vollständigen Spannungsabfall, sowie den Spannungsabfall über dem Kondensator ab. Mit dem Cursor ermitteln wir die Halbwertszeit für verschiedene Widerstände und Kondensatoren.

f=200 Hz

R[kΩ]	1	10	1
C[nF]	470	4,7	47
$T_{1/2}$[µs]	330	33	34
$\Delta T_{1/2}$[µs]	30	5	5

Anschließend tauschen wir in der letzten Konfiguration (1kΩ; 47nF) Den Kondensator mit dem Widerstand. Wir überzeugen uns, dass die Halbwertszeit für den Strom ($I = \frac{U}{R}$) die selbe ist.

Aufgabe 2: RC-Glied als Integrator und Differentiator

Wir nutzen den Kondensator mit C = 47nF und tauschen den Widerstand mit einem Potentiometer (5kΩ) aus. Wir greifen die Spannung zuerst über den Kondensator bei f = 10kHz ab. Als Signal stellen wir das Rechtecksignal ein. Wir beobachten, wie beim Erhöhen des Widerstands die Ausgangsspannung dem Integral näher kommt.

Nun tauschen wir Potentiometer mit Kondensator und stellen ein Dreieckssignal (1,5 kΩ, 4 V_{pp}) ein. Wir erkennen, dass bei niedrigem Widerstand des Potentiometers die Ausgangsspannung immer näher an die Ableitung heran kommt.

Aufgabe 3: Frequenz- und Phasengang eines RC-Glieds

Um den Frequenzgang gut zu erkennen, nehmen wir die im Praktikumsskript angegebenen Einstellung vor. Wir bauen einen Tiefpassfilter (C = 47nF; R = 1kΩ). Wir messen die Ausgangsspannung pro Frequenz und lesen daraus die Grenzfrequenz f_G.

$$f_g = (3{,}00 \pm 0{,}22)\,\text{kHz}$$

Wir wiederholen die Messung, diesmal mit einem Hochpassfilter der selben Größen.

$$f_g = (3{,}08 \pm 0{,}20)\,\text{kHz}$$

Um nun den Phasengang zu messen, nutzen wir die Cursorfunktion, um die Phase um die Grenzfrequenz herum abzulesen.

f [kHz]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δt [µs]	200	90	40	30	20	13	11	10	7	5
φ	2πΔtf									

Fehler: ±4 µs

Aufgabe 4: Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Wir bauen mit den Bauelementen C = 47nF und L_1 einen Serienschwingkreis. Den verbauten Widerstand variieren wir pro Messung. Wir nehmen mit dem Oszilloskop die verschiedenen Frequenzgänge auf und notieren die Resonanzfrequenz f_R, die Bandbreite Δf und Effektivwert der Aus-/Eingangsspannung.

R [Ω]	1000	220	47
f_R [kHz]	3,8	3,7	3,7
Δf [kHz]	5	1,5	0,6
$U_{A,eff}$ [V_{rms}]	0,59	0,44	0,2
$U_{E,eff}$ [V_{rms}]	0,62	0,6	0,58

Aufgabe 5: Resonanz überhöhung

Wir wiederholen das Verfahren aus Aufgabe 4, jedoch variieren wir nicht die Bauteile (konstant bei C=47nF; L1; R=220Ω), sondern messen den Frequenzgang über die einzelnen Elemente und messen die Resonanzfrequenzen.

$f_{R,R} = (3{,}70 \pm 0{,}05)\,Hz$

$f_{R,C} = (3{,}50 \pm 0{,}05)\,Hz$

$f_{R,L} = (3{,}85 \pm 0{,}05)\,Hz$

Aufgabe 6: Bestimmung der Dämpfungskonstanten eines freien, gedämpften Schwingkreis

Wir nutzen den selben Versuchsaufbau erneut und messen die Spannung über die Spule. Wir schicken Rechtecksignale mit einer kleinen Frequenz (260Hz), sodass man Schwingung beobachten kann. Wir messen den Spannungsabfall pro Periode

Periode	1	2	3	4	5
Spannung [V_{rms}]	3,50	1,88	0,94	0,41	0,13

Periode $T = (0,27 \pm 0,2)_{ms}$

Fehler U: $\pm 0,03\, V_{rms}$

Erhöht man den Widerstand, so erkennt man ab einer gewissen Größe keine Schwingung mehr.

Aufgabe 7: Parallelschwingkreis - Bandsperre

Wir bauen eine Bandsperre auf, mit $C = 47\,nF$, $R = 1k\Omega$ und $L1$. Wir messen die Ausgangsspannung über den Widerstand und nehmen den Frequenzgang auf. Wir bestimmen die Resonanzfrequenz

$$f_R = (3,68 \pm 0,05)\,kHz$$

Aufgabe 8: Signalumformung

In diesem Aufgabenteil senden wir ein Signal aus, welches hauptsächlich aus 3 Sinuswellen besteht. Von diesen notieren wir jeweils die Frequenzen und Amplituden:

Sinus 1: $f = 91,55\,Hz$ $A = -2,44\,dBV$

Sinus 2: $f = 3,62\,kHz$ $A = -7,44\,dBV$

Sinus 3: $f = 8,01\,kHz$ $A = -8,06\,dBV$

Wir versuchen nun durch Tief- und Hochpassfilter die 2. Sinuswelle zu isolieren. Mit einem Hochpass ($R = 10k\Omega$, $C = 47nF$) versuchen wir Sinus 1 herauszufiltern

→ Sinus 1: $-12,25\,dBV$; Sinus 2: $-7,87\,dBV$; Sinus 3: $-8,19\,dBV$

Nun schalten wir einen Hochpass (L_1; C=47 nF) (abgreifen über C) ein um Sinus 3 zu dämpfen. Den Tiefpass nehmen wir heraus:

Sinus 1: -2,25 dBV, Sinus 2: 9,63 dBV, Sinus 3: -19,12 dBV

Nun nutzen wir Bandpass filter

L_1, R=47Ω, C=47nF:

Sinus 1: -74,92 dBV; Sinus 2: -38,36 dBV; Sinus 3: -58,36 dBV

L_1, R=1kΩ, C=47nF

Sinus 1: -31,31 dBV Sinus 2: -8,5 dBV Sinus 3: -13,19 dBV

Aufgabe g: Aufbau eines einfachen AM-Empfängers

Wir bauen den Aufbau wie im Skript beschrieben auf. Nun versuchen wir, durch Variation der Kapazität bzw der Induktivität einen Peak bei 1MHz zu erhalten. Wir machen ein Bildschirmfoto.



1. Einleitung

1.1 Motivation

Schaltungen mit Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten, spielen durch ihre Eigenschaften eine wichtige Rolle bei Signalmodulation oder zur Signalbereinigung. Auch ist es möglich damit Frequenzen zu filtern. Weswegen diese häufige Verwendung finden.

1.2 Grundlagen aus der Physik

1.2.1 RC-Glied

Hierbei handelt es sich um eine Schaltung, in der ein ohmscher Widerstand R und ein Kondensator C über einen Schalter S an eine Spannungsquelle U_E in Reihe geschaltet sind. Hierbei werden eine Spannung am Widerstand U_R und eine Spannung am Kondensator U_C aufgebaut. Dabei gilt nach dem Kirchhoffschen Maschengesetz:

$$U_E = U_C + U_R = U_C + RI \tag{1}$$

Wenn man nun für $I = \dot{Q} = C\dot{U_C}$ einsetzt, erhält man folgende DGL

$$U_E = U_C + RC \cdot \dot{U_C} \tag{2}$$

Es ergeben sich folgende Strom- und Spannungsverläufe:

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{\frac{t}{\tau}} \tag{3}$$

$$U_R(t) = U_E \cdot e^{\frac{t}{\tau}} \tag{4}$$

$$I(t) = \frac{U_E}{R} \cdot e^{\frac{t}{\tau}} \tag{5}$$

Wobei $\tau = RC$.
Um die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ zuberechnen kann man folgende Gleichung verwenden

$$T_{\frac{1}{2}} = \tau \cdot \ln 2 \tag{6}$$

1.2.2 Impedanzen

Werden verschiedene Bauteile mit einem Wechselstrom $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ betrieben, kann es vorkommen, dass Spannung und Strom nicht mehr in Phase sind. Um dies zu beschreiben werden bei Wechselströme komplexe Widerstände , Impedanzen verwendet. Die sind

gegeben als:

$$\text{ohm'scher Widerstand: } Z_R = R \tag{7}$$

$$\text{Kapazitäten:} Z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{8}$$

$$\text{Induktivität:} Z_L = i\omega L \tag{9}$$

Man erhält eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ bei Kapazitäten und $-\frac{\pi}{2}$ bei Induktivitäten:

1.2.3 Hoch- und Tiefpassfilter

Betreiben wir den zuvor besprochenen RC-Glied mit einer Wechselstrom, erhalten wir die Möglichkeiten verschiedene Frequenzen aus dem Eingangssignal rauszufiltern. Für die Spannung am Kondensator erhält man

$$\begin{aligned} U_C(t) =& \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} U_E(t) \\ =& \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_E(t) \\ =& \frac{-i}{\omega CR - i} U_E e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn wir den Betrag des Spannungsabfalls betrachten erhält man:

$$|U_C| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \tag{11}$$

Für die Phase φ erhält man mit

$$\varphi = \arctan \frac{Im(U_C)}{Re(U_C)}$$

folgende Phase:

$$\varphi = \arctan -\omega RC \tag{12}$$

Für kleine Frequenzen geht die Ausgangsspunnung gegen die Eingangsspannung und bei hohen Frequenzen gegen 0. Also stellt diese Schaltung einen Tiefpass dar.
Wenn man nun über den Widerstand abgreift, erhält man folgendes Spannungsbetrag:

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}} \tag{13}$$

und folgende Phase

$$\varphi = \arctan \frac{1}{\omega RC} \tag{14}$$

also einen Hochpass.
Man definiert die Wirkung des Filters, Bandbreite, mit der Grenzfrequenz ω_g

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \tag{15}$$

Die Frequenz stellt den Schwellenwert da, bei welcher die Amplitude auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist.

1.2.4 Differenzier- und Intigrierglied

Ein RC-Glied kann unter bestimmten Bedingungen dazu dienen, ein eingehendes Signal zeitlich zu integrieren oder zu differenzieren. Um ein Integrator zu erhalten verwendet man einen Tiefpass, wobei $\tau >> T$ also für den Fall $U_E >> U_A$, wobei T die Inverse Frequenz f der Eingangsspannung. Aus der Kondensatorgleichung erhält man

$$\begin{aligned} Q &= CU_A && |\frac{d}{dt} \\ I &= C\frac{dU_A}{dt} \end{aligned} \tag{16}$$

Aus der Maschenregel erhält man

$$\begin{aligned} U_E &= U_A \cdot IR \\ \Rightarrow I &= \frac{U_E - U_A}{R} \end{aligned}$$

durch einsetzten erhält man

$$\frac{dU_A}{dt} = \frac{1}{RC}(U_E - U_A)$$

unter der Annahme, dass $U_E >> U_A$ folgt

$$\frac{dU_A}{dt} \approx \frac{1}{RC}U_E \tag{17}$$

durch anschließendes Intrigieren

$$U_A \approx \frac{1}{RC}\int U_E dt \tag{18}$$

Also entspricht unter der Bedingung, dass $\tau \gg T$, das ausgehende Signal über dem Kondensator mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{RC}$ näherungsweise dem Integral des Eingangssignals. Will man nun das Eingangssignal differenzieren, verwendet man einen Hochpassfilter. Aus

der Kondenstorgleichung und den Maschenregel folgt

$$U_E = U_C + U_A = \frac{1}{C}Q + U_A = \frac{1}{C}\int I\,dt + U_A \tag{19}$$

$$\Longrightarrow\ I = C\frac{d(U_E - U_A)}{dt} \tag{20}$$

Wobei im letzten Schritt nach der Zeit differenziert wurde. Unter der Voraussetzung $\tau \ll T$ folgt $U_A \ll U_E$ und dadurch

$$I \approx C\frac{dU_E}{dt} \tag{21}$$

und unter Nutzung des Ohm'schen Gestzes

$$U_A \approx CR\frac{dU_E}{dt} \tag{22}$$

Die Ausgangsspannung U_A entspricht in dem Fall dem differenzierten Eingangssignal mit einem Proportionalitätsfaktor von RC.

1.2.5 RCL-Schwingkreis

Der Kondensator wird sich zunächst vollständig entladen, wodurch ein Stromfluss durch die Spule entsteht, der ein Magnetfeld aufbaut. Sobald die Entladung – und damit der Stromfluss – abgeschlossen ist, kollabiert das Magnetfeld. Gemäß der Lenz'schen Regel wird durch diesen plötzlichen Magnetfeldabbau ein Strom induziert, der betragsgleich, jedoch entgegengesetzt zum ursprünglichen Entladungsstrom verläuft. Ist das Magnetfeld vollständig abgebaut, sind die Ladungen im Kondensator vollständig invertiert, und der Vorgang beginnt von neuem.
Während ein idealer Schwingkreis auf diese Weise unendlich lange ungedämpft schwingen würde, führen in einem realen Schwingkreis die Widerstände der Bauteile und der Leitungen zu einer Dämpfung, wodurch die Schwingung allmählich zum Stillstand kommt. Um dieses Verhalten zu modellieren kann man noch einen Widerstand in die ideale Schaltung einführen. Wie in folgender Abbildung:

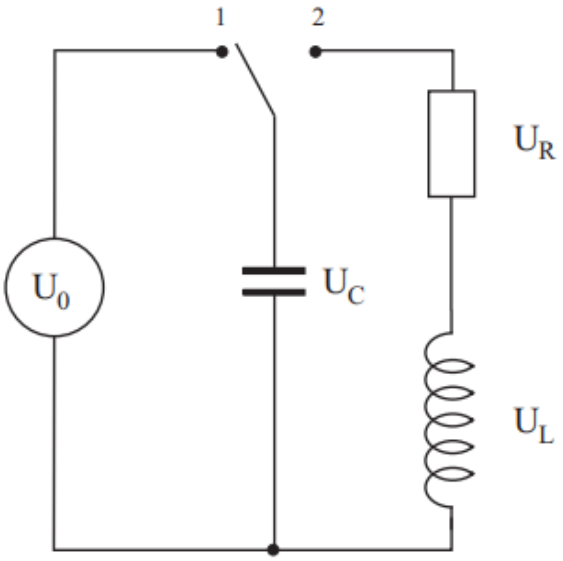


Abbildung 1 : Aufbau RLC-Schwingkreis (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Praktikum PAP 2.2", Stand: 2024)

Um den Schwingkreis anzuregen, wird der Schalter zunächst in Stellung 1 belassen, bis der Kondensator vollständig aufgeladen ist. Anschließend wird der Schalter auf Stellung 2 umgelegt, wodurch es zu Oszillationen im LC-Schwingkreis kommt, die jedoch durch den ohmschen Widerstand gedämpft werden. Dies folgt aus dem Kirchhoff'schen Maschengestz:

$$U_R + U_C = U_L \tag{23}$$

Durch einsetzen und zeitliches Ableiten erhalten wir folgende DGL:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}I + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left(Ae^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t}\right) \tag{24}$$

Wobei$A$ und B Konstanten sind die von den Anfangsbedingungen abhängen. Da wir uns in diesem Versuch nur den Schwingfall anschauen, gilt:

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \tag{25}$$

Es folgt dadurch folgender Strom:

$$I(t) = I_0 e^{\frac{t}{\tau_r}} e^{i\omega_f t + \phi} \tag{26}$$

Wobei

$$\tau_r = \frac{1}{\delta} = (\frac{R}{2L})^{-1} \tag{27}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{28}$$

Mit Hilfe des logarithmischen Dekrament Λ kann man die Dämpfungskonstante δ bestimmen:

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \delta T \tag{29}$$

Hier ist T die Periodendauer und A_n/A_{n+1} das Verhältnis der Werte nach einer Periode.

1.2.6 Resonanz des RLC-Schwingkreises

Wenn man nun zum RLC-Glied noch eine externe Wechselstromquelle anschließt, erhält man einen angetriebenen Oszillator. Der Strom in dieser Schaltung ist gegeben als

$$I = \frac{1}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}} \cdot U_0 e^{i\omega t - \phi} \tag{30}$$

Dies ist ersichtlich, wenn man die gesamt Impedanz der Reihenschaltung betrachtet

$$\begin{aligned} Z_{ges} &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \end{aligned} \tag{31}$$

Betrachtet man den Betrag des Stroms kann man unter Beachtung, dass es sich hierbei um eine komplexe Zahl handelt, folgenden Wert bestimmen

$$|I|(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{32}$$

Man erhält also folgende Resonanzfrequenz ω_r :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{33}$$

bei der sich der Schwingkreis, wie eine Schaltung mit nur dem Ohm'schen Widerstand verhält.

Man kann mit Hilfe von $|U| = |Z| \cdot |I|$ auf folgende Spannungsbeträge schließen:

$$|U_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} U_0 \tag{34}$$

$$|U_C| = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{35}$$

$$|U_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{36}$$

Man sieht, dass die Ausgangsspannungen in ähnlicher Weise von den Frequenzen abhängen wie bei Hoch- und Tiefpassfiltern. Betrachtet man die Spannung über dem ohmschen Widerstand, so wird diese reduziert, solange die Eingangsfrequenz nicht genau der Resonanzfrequenz entspricht. Das Element filtert also alle Frequenzen heraus, die nicht im Resonanzbereich liegen, und wirkt daher als Bandpassfilter.
Um die Funktionsweise genauer zu beschreiben, definiert man – analog zur Grenzfrequenz bei Hoch- und Tiefpassfiltern – die Bandbreite $\Delta\omega$ als die Breite des Intervalls $[\omega_1; \omega_2]$, innerhalb dessen die Amplitude der Spannung noch über dem $\frac{1}{\sqrt{2}}$-Fachen der Eingangsspannung liegt:

$$\delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} = 2\delta \tag{37}$$

Bei stärkerer Dämpfung erhält man also eine größere Bandbreite.
Wenn man über den Kondensator oder der Spule abgreift erhält man folgende Resonanzfrequenzen

$$\omega_{C/L} = \sqrt{\omega_r^2 \mp 2\delta^2} \tag{38}$$

Die Ausgangsspannung kann überhalb der Eingangsspannung liegen, dies führt jedoch nicht zum Widerspruch mit dem Kirchhoffschen Maschenregel, da die Spannungen Über L und C um eine Phase von π verschoben sind. Wenn $R \to 0$ geht diese Überhöhung beliebig hoch.

1.2.7 Parallelschwingkreis

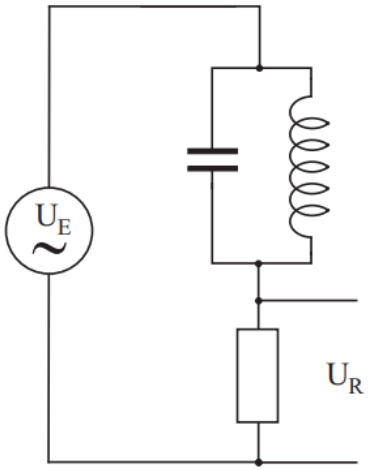


Abbildung 2: Aufbau Parallelschwingkreis (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Praktikum PAP 2.2", Stand: 2024)

Man kann nun aufgrund der Eigenschaften der beiden parallel geschalteten Komponenten Überlegungen über das Verhalten bei sehr hohen beziehungsweise sehr niedrigen Frequenzen machen: Ist die Frequenz viel größer als die Resonanzfrequenz, so haben wir bereits gesehen, dass die Impedanz des Kondensators sehr niedrig wird – die Spannung fällt also kaum über das Parallelglied ab. Im niederfrequenten Fall ist die Impedanz der Spule sehr gering, und die Spannung fällt ebenso wenig ab. So ergibt es sich, dass die Impedanz nur für die genau „passende“ Frequenz, die eben der Resonanzfrequenz entspricht, sehr hoch wird. Dies führt durch Überlegungen wie beim Spannungsteiler beim Abgriff der Spannung über dem Ohmschen Widerstand dazu, dass die Spannung für $\omega \neq \omega_r$ ähnlich der Eingangsspannung bleibt, und nur für $\omega \approx \omega_r$ sehr stark abnimmt. Die Schaltung fungiert also als Bandsperre um ω_r.

1.2.8 AM-Radio

Die vorherigen Mechanismen ermöglicht uns, einen amplitudenmodulierten Radioempfänger zu konstruieren. Das ist Grundprinzip der Amplitudenmodulation das Sprachsignal, welches in Maßstäben von EM-Wellen recht niederfrequent ist, zur besseren Übertragbarkeit als Einhüllende einer höherfrequenten EM- Trägerfrequenz zu verpacken. Nach dieser Modulation kann das Signal allerdings nicht mehr einfach ausgegeben werden, das der Mittelwert des hochfrequenten Trägersignals auf Null liegt, was eine Anregung des Lautsprechers unmöglich macht. Soll nun dieses Signal ausgegeben werden, muss man die Modulation wieder rückgängig machen. Dazu wird eine Diode genutzt: Sie sorgt dafür, dass das Minimum des empfangenen Signals auf Null gebracht wird, wodurch das hochfrequente Trägersignal asymmetrisch wird, sodass es durch Anschluss an einen Lautsprecher ausgegeben werden kann. Bei Wiedergabe durch einen Lautsprecher sorgt die mechanische

Trägheit der Membran und des menschlichen Trommelfells für ein Tiefpassverhalten, dass die hohe Trägerfrequenz herausfiltert. Dies kann auch aktiv dadurch getan werden, dass hinter der Diode ein geerdeter Kondensator geschaltet wird, der durch seine frequenzabhängige Impedanz gegen die Trägerfrequenz als Tiefpassfilter fungiert.
Um nun nicht den Funk auf der gesamten möglichen Bandbreite zu empfangen, kann noch ein Bandpassfilter vor der Diode installiert werden. Dazu wird ein regelbarer Kondensator parallel zu einer Spule vor der Diode angeschlossen und geerdet.

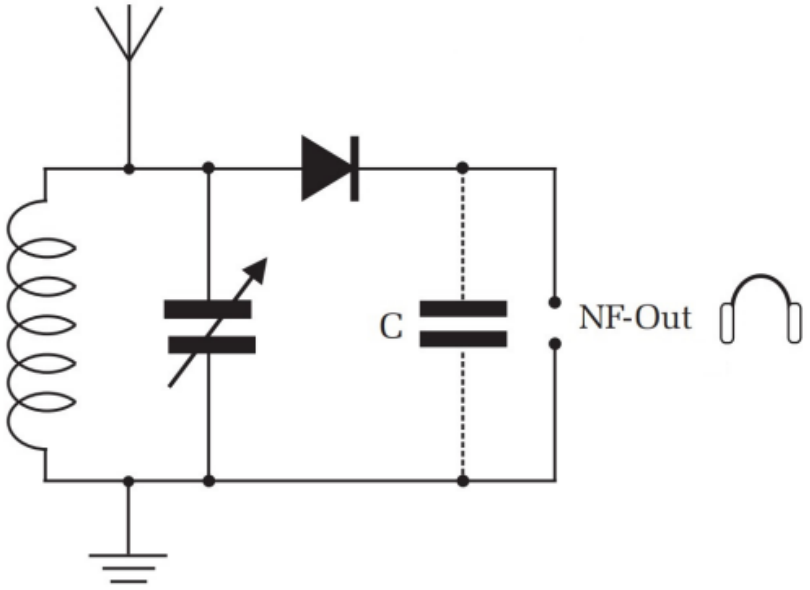


Abbildung 3: Schaltplan des AM-Radios

2. Auswertung

2.1 Aufgabe 1

Wir berechnen zunächst den theoretischen Wert der Zeitkonstante τ_{theo}. Dazu verwenden wir folgende Gleichung:

$$\tau_{theo} = R \cdot C$$

Die Fehlerformel ergibt sich nach Gauß:

$$\Delta\tau_{theo} = \tau_{theo}\sqrt{(\frac{\Delta R}{R})^2(\frac{\Delta C}{C})^2} \tag{39}$$

Da hier gegeben ist, dass man hier eine Toleranz von $0,1$ bei C und $0,05$ bei R folgt

$$\Delta\tau_{theo} \approx \tau_{theo} \cdot 0,11 \tag{40}$$

Es ergibt sich folgende Tabelle, mit den gemessen Werten τ_{exp}:

C $[nF]$	R $[k\Omega]$	f $[Hz]$	τ_{exp} $[\mu s]$	τ_{the0} $[\mu s]$	σ-Abweichung
470 ± 47	$1 \pm 0,05$	200	476 ± 43	$470 \pm 51,7$	0,09
$4,7 \pm 0,47$	$10 \pm 0,5$	200	48 ± 8	$47,0 \pm 0,5$	0,12
$47 \pm 4,7$	$1 \pm 0,05$	200	49 ± 8	$47,0 \pm 0,5$	0,25

Tabelle 1: Zeitkonstante des RC-Glieds

2.2 Aufgabe 2

2.2.1 Integrator

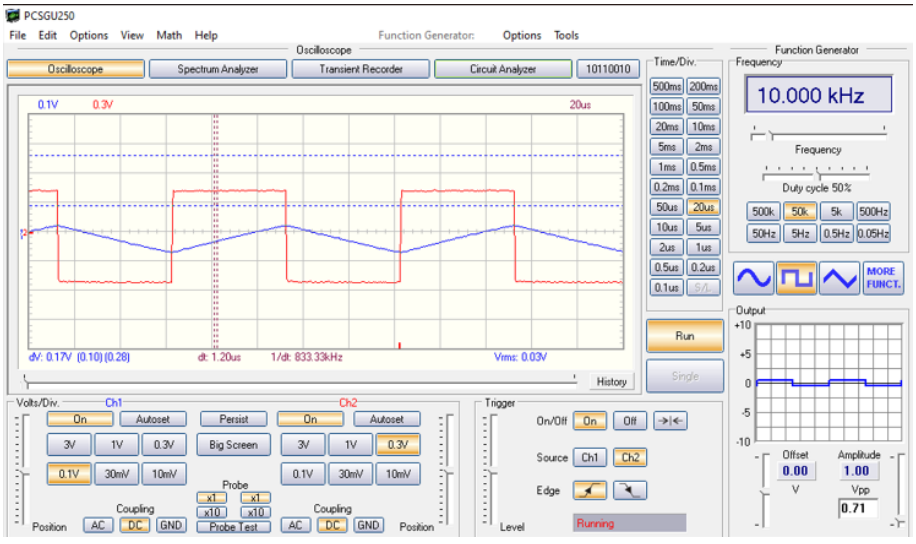


Abbildung 3:Integration eines Rechtecktssignals

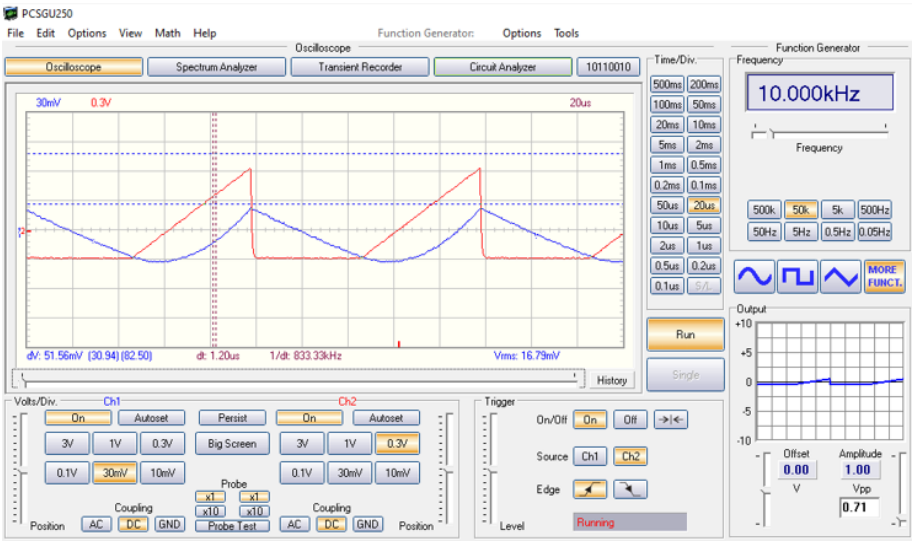


Abbildung 4:Integration eines Sägezahnsignals

Wird der Widerstand ausreichend erhöht, gibt der Integratorschaltkreis also wirklich das Integral des eingehenden Signals wieder. Es fällt auf, dass die ausgehende Spannung stets deutlich niedriger ist als die eingehende, entsprechend der Bedingung $U_A \ll U_E$ aus der Herleitung der Integralbeziehung.

2.2.2 Differentiatior

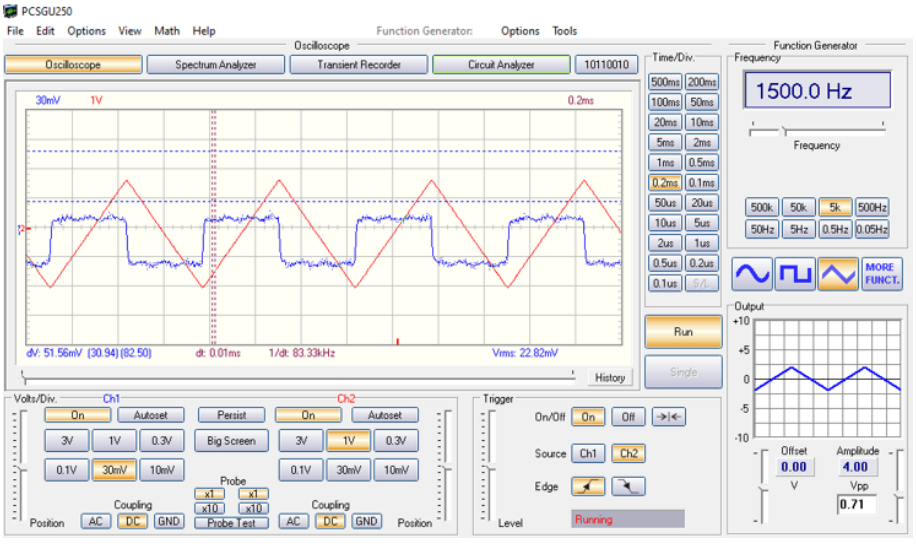


Abbildung 5:Differentiation eines Dreieck-Signals

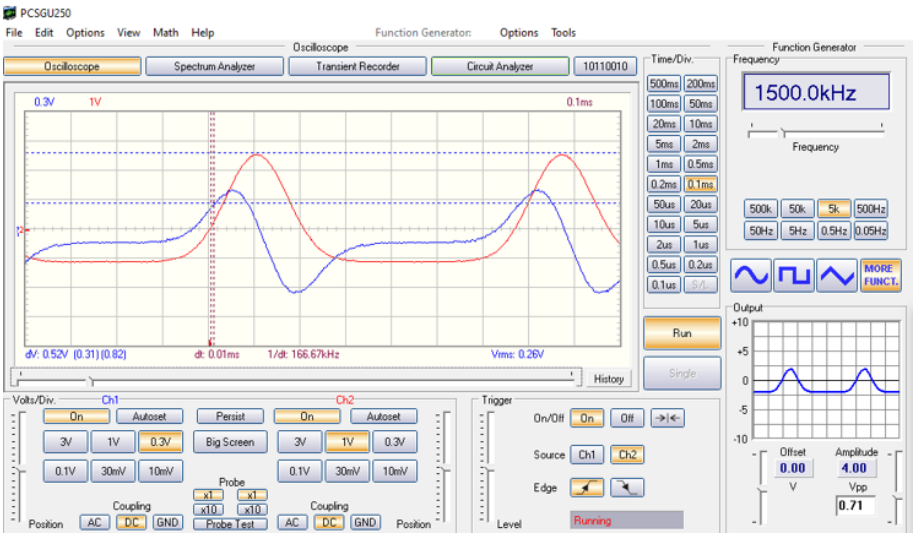


Abbildung 6:Differentiation eines Gauß-Signals

Auch der Differentiator wirkt also entsprechend. Hier haben die Ausgangssignale ebenso niedrigere Spannungen als die Eingangssignale. Die Funktion des einfachen RC-Gliedes als Integrator oder Differentiator wird also unter den richtigen Voraussetzungen sehr schnell klar.

2.3 Aufgabe 3

In der folgende Tabelle ist die Phasenverschiebung bei verschiedenen Frequenzen aufgetragen:

Frequenz f	$\Delta t[\mu s]$	$\varphi[rad]$
1	200	1,26
2	90	1,13
3	40	0,75
4	30	0,75
5	20	0,63
6	13	0,49
7	11	0,48
8	10	0,50
9	7	0,40
10	5	0,31

Tabelle 2: Phasenverschiebungen des Hochpassfilter

Lässt man die Werte plotten erhält man folgendes Diagramm:

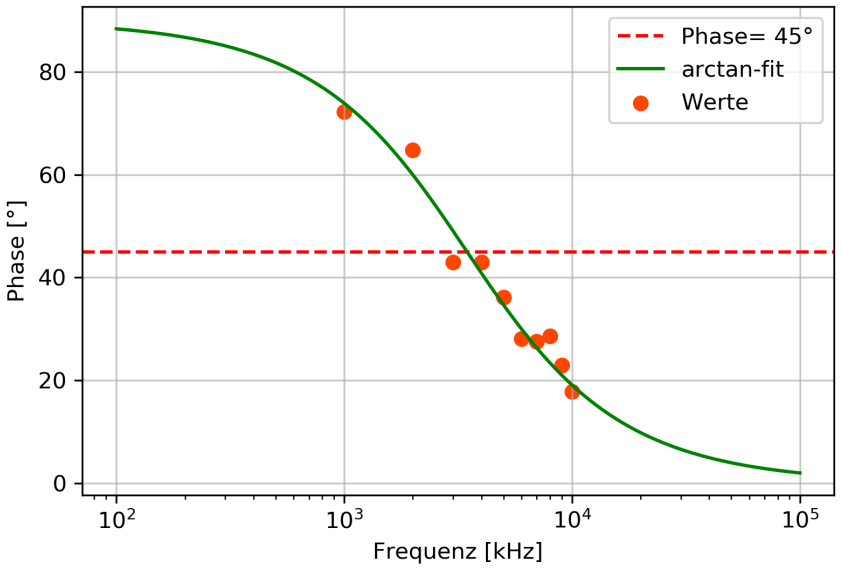


Abbildung 7: Phase gegen die Frequenz

Man kann aus dem Diagramm eine Grenzfrequenz von

$$f_{gr} = (3000 \pm 100) Hz$$

ablesen, wobei hier der Fehler geschätzt wurde. Vergleicht man diesen mit den Wert den man zuvor bestimmt hat

$$f_{gr} = (3080 \pm 200) Hz$$

(im Messprotokoll zu finden), erhält man folgende σ-Abweichung

$$\Delta\sigma = 0,36$$

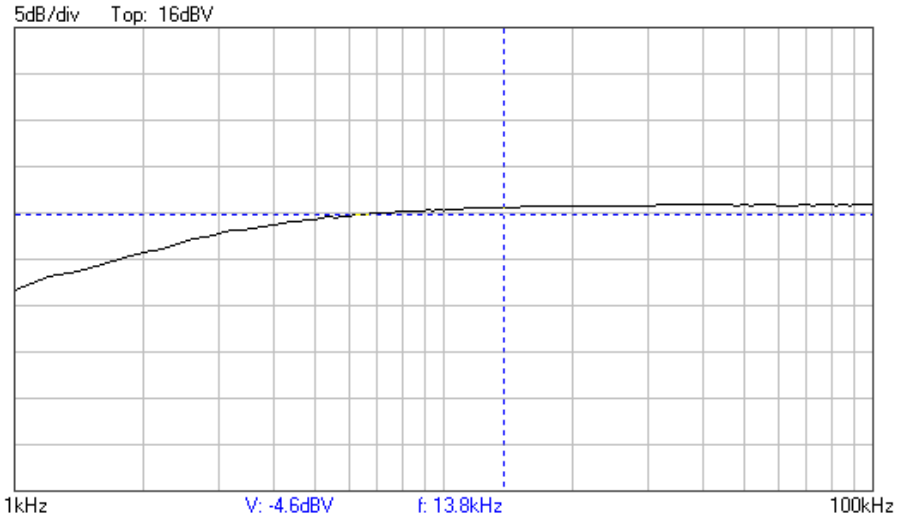


Abbildung 8: Hochpassfilter

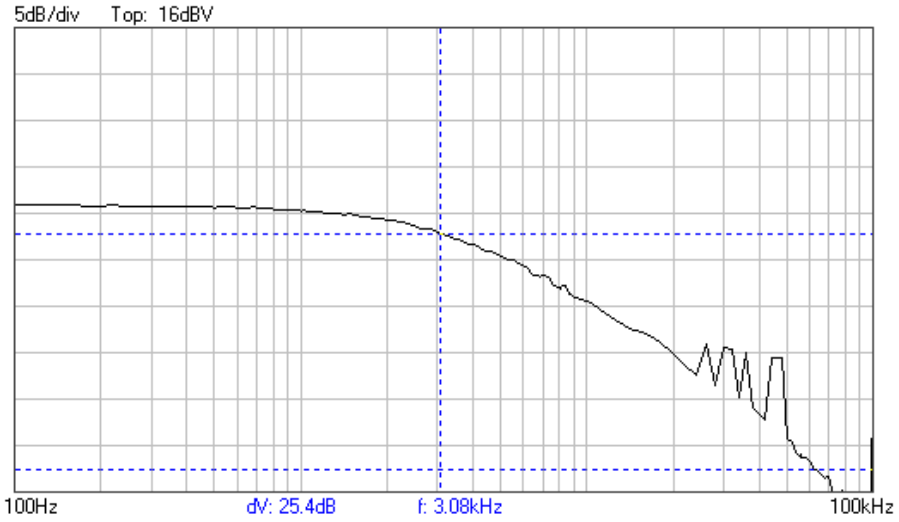


Abbildung 9: Tiefpassfilter

2.4 Aufgabe 4

Um die Induktivität L_1 zu berechnen, verwendet man die Gleichung (33) durch umstellen erhält man

$$L = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 \cdot C}$$

hier ist f_r die Resonanzfrequenz. Wenn man aus den Werten den Mittelwert und die Standardabweichung bestimmt erhält man folgende Induktivität

$$L_1 = (0,0386 \pm 0,0012)H$$

Um die Gesamtwiderstand $R_{ges} = R + R_v$ zu bestimmen, stellt man Gleichung 37 um

$$R_{ges} = (2\pi\Delta f)^2 \cdot L_1$$

die Fehler ergibt sich nach Gauß wie folgt

$$\Delta R_{ges} = R_{ges}\sqrt{(\frac{\Delta(\Delta f)}{\Delta f})^2 + (\frac{\Delta L}{L})^2}$$

Daraus erhält man folgende Werte, die hier in einer Tabelle zusammengetragen wurden

Widerstand[Ω]	R_{ges} [Ω]	ΔR_{ges} [Ω]
1000	1213	44
220	364	26
47	146	24

Tabelle 3: Gesamtwiderstand der 3-dB Messung

Den Verlustwiderstand R_V kann man mit Hilfe folgender Formel bestimmen

$$U_A = \frac{R}{R + R_V} U_E$$
$$\Rightarrow R_V = R(\frac{U_E}{U_A} - 1)$$

Man erhält dadurch folgende Werte

Widerstand[Ω]	R_V [Ω]	ΔR_V [Ω]
1000	50	4
220	80	7
47	89	14

Tabelle 4: Verlustwiderstände durch Eingangs- und Ausgangsspannung

Mit folgender Fehlerformel

$$\Delta R_V = \sqrt{(\frac{R_V \cdot \Delta R}{R})^2 + (\frac{R \cdot \Delta U_E}{U_A \cdot U_E})^2 + (\frac{R \cdot U_E \Delta U_A}{U_A^2})^2}$$

Vergleichen wir diese Werte mit den Werten die man zuvor bestimmt hat erhält man folgende σ-Abweichungen

Widerstand[Ω]	σ-Abweichung
1000	3,6
220	2,37
47	0,36

Tabelle 5: Vergleich von den Verlustwiderständen

Man kann im Messprotokoll sehen, dass man verschiedene Resonanzfrequenzen bei verschiedenen Widerständen, messen konnte. Ein möglicher Grund für diesen Effekt könnte sein, dass durch dielektrische Effekte im Kondensator der Schwingkreis weiter gedämpft wird, wodurch auch sich die Resonanzfrequenz ändert, da man bei der DGL noch einen Term beachten muss.

2.5 Aufgabe 5

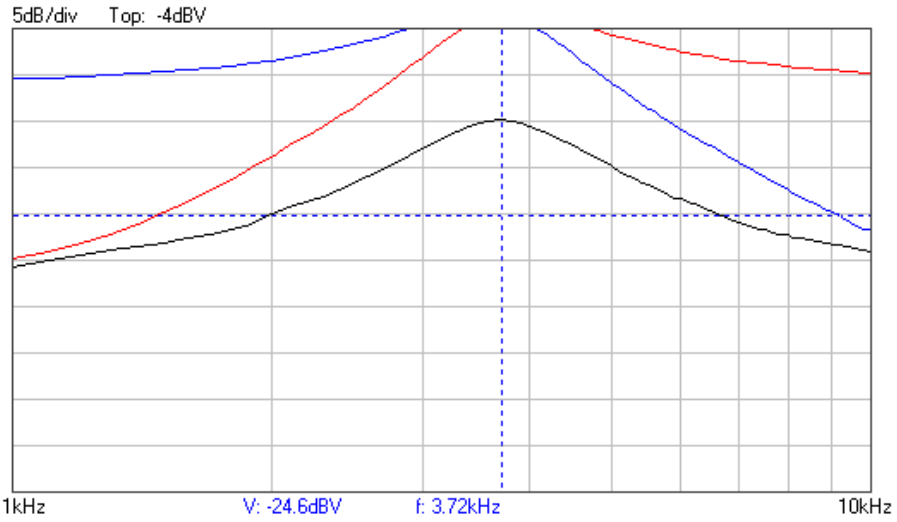


Abbildung 10:Die Spannungsverläufe über verschiedenene Komponenten (blau:U_C, rot:U_L, schwarz:U_R)

Aus diesem Versuchsteil erhalten wir verschiedene Resonanzfrequenzen. Für das Abgreifen über den Widerstand verwendet man (33), daraus folgt

$$L_{1_R} = 0,0394H$$

Unter Verwendung von (38) erhält man eine quadratische Gleichung, unter Verwendung der abc-Formel folgt, für das Abgreifen über den Kondensator

$$L_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8R^2C^2(2\pi f_C)^2}}{2C(2\pi f_C)}$$

und über die Spule

$$L_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8R^2C^2(2\pi f_C)^2}}{-2C(2\pi f_C)}$$

. Hier wurden nur die physikalisch Relevanten Lösungen verwendet. Daraus ergeben sich folgende Induktivitäten

$$L_{1_C} = 0,0388H$$
$$L_{1_L} = 0,0404H$$

Also insgesamt folgt für den Mittelwert und der Standardabweichung:

$$L_1 = (0,0397 \pm 0,0008)H$$

Vergleicht man diesen Wert mit den Wert den man in Aufgabe 4 bestimmt hat erhält man folgende σ-Abweichung

$$0,76$$

2.6 Aufgabe 6

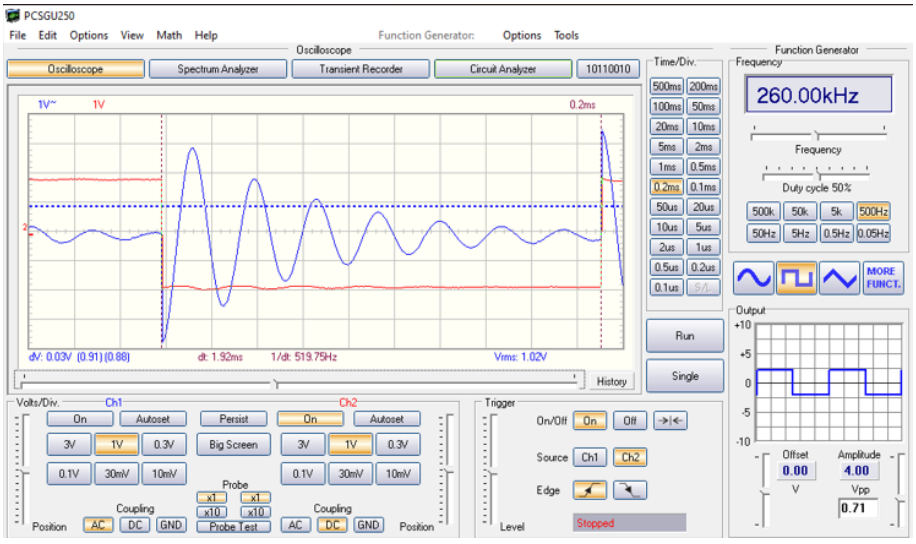


Abbildung 11: Dämpfung des Oszillators

Aus den exponentiellen Abfall der Spannung kann man nun das logarithmische Dekrement Λ bestimmen. Dazu verwendet man Gleichung (29). Hier ist die Periodendauer $(0,27 \pm 0,02)ms$, wie aus dem Messprotokoll zu entnehmen ist. Wenn man aus den einzelnen Messungen das logarithmische Dekrement bestimmt und den Mittelwert bestimmt, folgt

für Λ

$$\Lambda = (0,82 \pm 0,13)$$

mit der Standardabweichung als Fehler. Daraus kann man den gesamt Widerstand berechnen. Aus (29) und (27) erhält man

$$2L \cdot f \cdot \Lambda = R_{ges}$$

Daraus erhält man einen Gesamt Widerstand R_{ges} von

$$R_{ges} = (235 \pm 18)$$

Es wurde für L den Wert verwendet, den man in Aufgabe 4 bestimmt hat. Der Fehler von R_{ges} lässt sich nach Gauß wie folgt berechnen

$$\Delta R_{ges} =_{ges} \sqrt{(\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda})^2 + (\frac{\Delta f}{f})^2 + (\frac{\Delta L}{L})^2}$$

Vergleicht man diesen Wert, mit den aus Aufgabe 4, bei welcher man einen Widerstand von $R = 220\Omega$ verwendet hat, erhält man folgende σ-Abweichung

$$4,08$$

2.7 Aufgabe 7

Aus dem Parallelschwingkreis haben wir eine Resonanzfrequenz von $f_R = (3,68 \pm 0,05)kHz$. Der theoretisch zu erwartende Wert kann man mit Gleichung (33). Für L wird hier auch der Wert aus Aufgabe 4 verwendet. Es ergibt sich also

$$f_{theo} = (3737 \pm 20)Hz$$

mit der Fehlerformel

$$\Delta f_{theo} = f_{theo}\sqrt{(\frac{\Delta L}{2L})^2 + (\frac{\Delta C}{2C})^2}$$

Es ergibt sich folgende σ-Abweichung

$$1,06$$

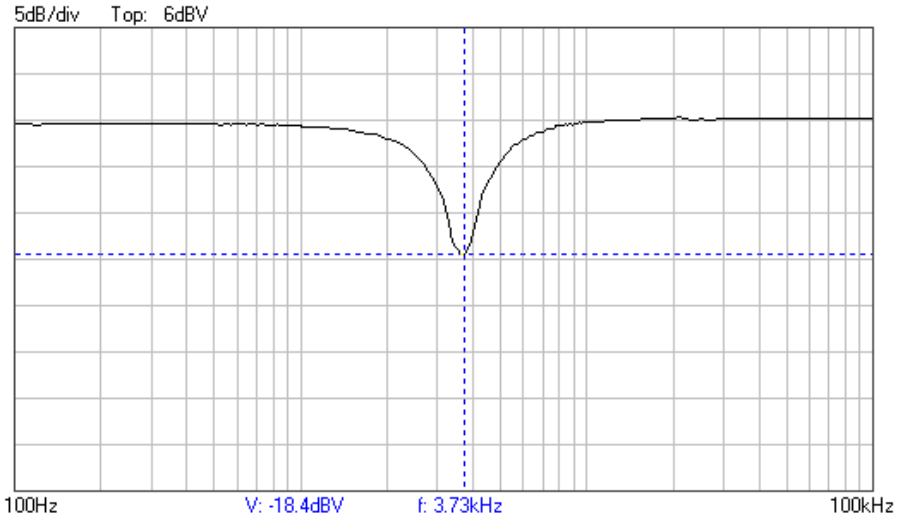


Abbildung 12: Verlauf einer Bandsperre

2.8 Aufgabe 8

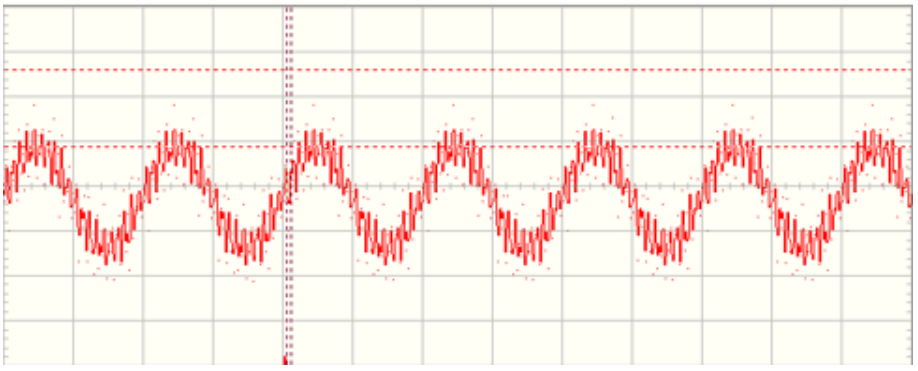


Abbildung 13: Das Eingangssignal



Abbildung 14: Das Spektrum des Eingangssignal

Man sieht anhand der Messungen, dass beim Hochpass der Anteil der $f = 100Hz$ auf $-12,25dBV$ von $-2,44dBV$ gesunken ist, also um einen Faktor $3,16$ verkleinert wurde. Die anderen Signale bleiben fast unverändert.

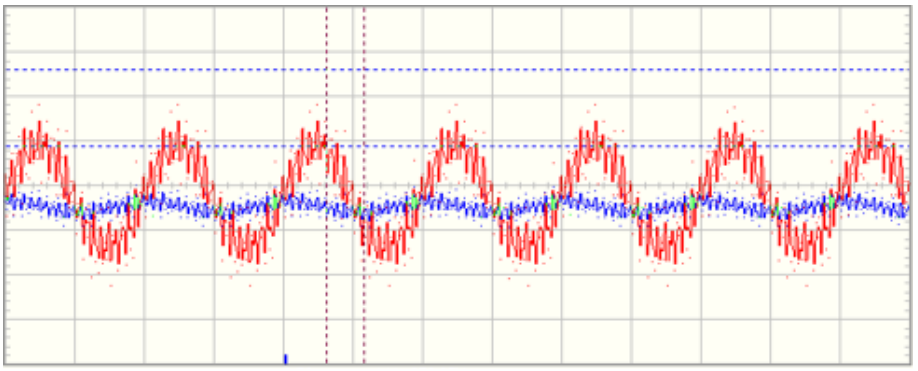


Abbildung 15: Das Signal mit einem Hochpassfilter

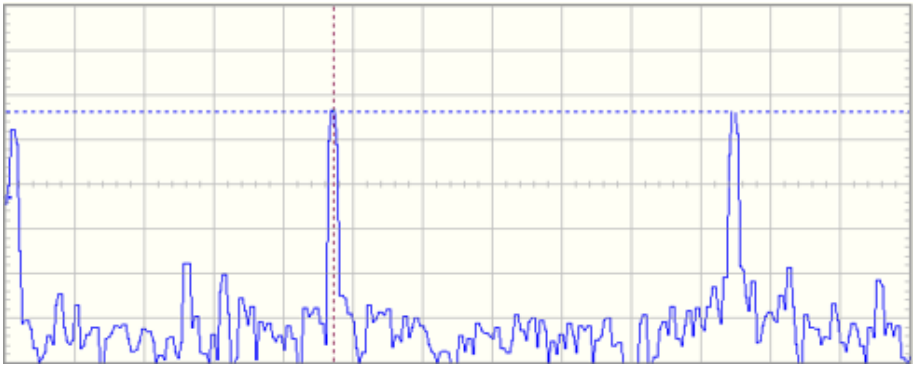


Abbildung 16: Das Spektrum vom Signal mit Hochpassfilter

Bei dem Tiefpass werden die höheren Frequenzen gefiltert. Hier wird das Signal bei $f = 8kHz$ um den Faktor $3,55$ verringert. Auch hier bleiben die anderen Sinus-Schwingungen fast unverändert.

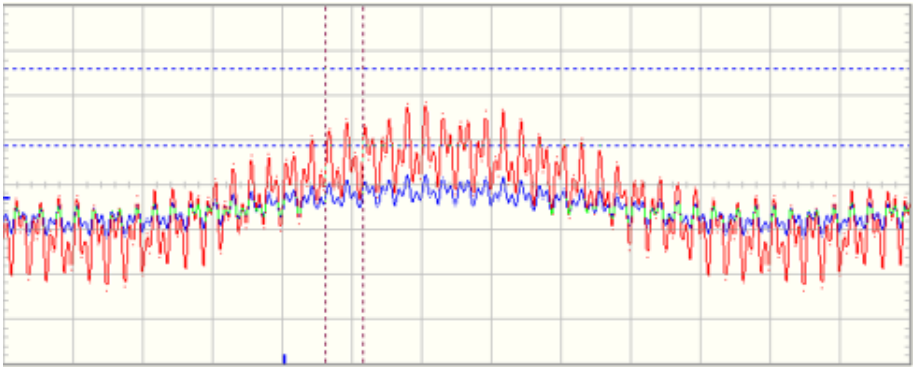


Abbildung 17: Das Signal mit einem Tiefpassfilter

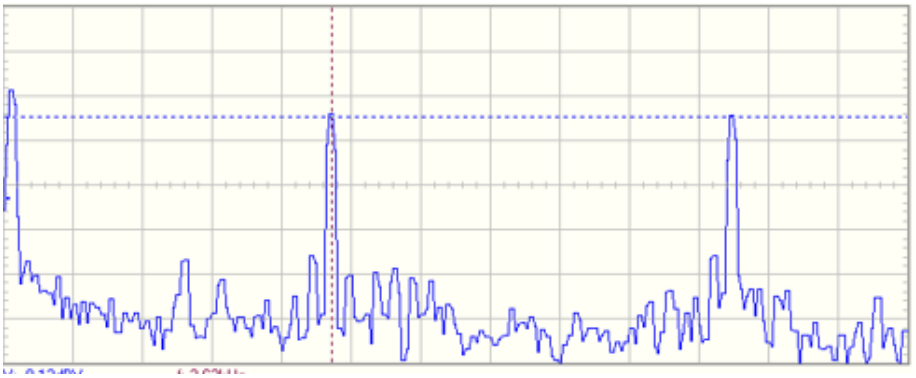


Abbildung 18:Das Spektrum vom Signal mit Tiefpassfilter

Bei dem Bandpassfilter mit einem Widerstand von 47Ω sieht man, dass alle drei Sinus-Signale stark unterdrückt werden. Man kann jedoch sehen, dass das Signal bei ungefähr $4kHz$ am wenigsten gefiltert wird. Mit dem Filter werden die Signale um 4246 für das $100Hz$, 316 für das $8kHz$ Signal und 34 für das $4kHz$.

Verwendet man nun einen Widerstand von $1k\Omega$ erhält man eine Abschwächung von 28 für das $100Hz$ Signal, $1,13$ für das $4kHz$ Signal und $1,8$ für das $8kHz$ Signal. Man sieht, dass der Unterschied zwischen der Abschwächung zwischen dem $4kHz$ und dem $8kHz$, nicht so groß ist, wie bei dem Bandpassfilter mit dem 47Ω.

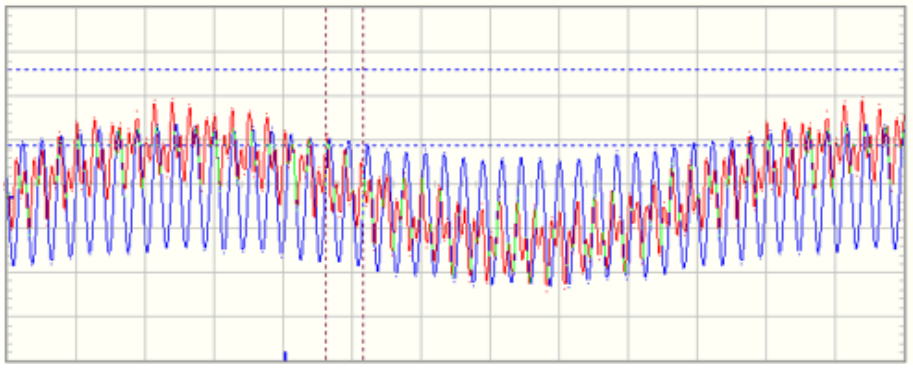


Abbildung 19: Das Signal mit einem Bandpassfilter

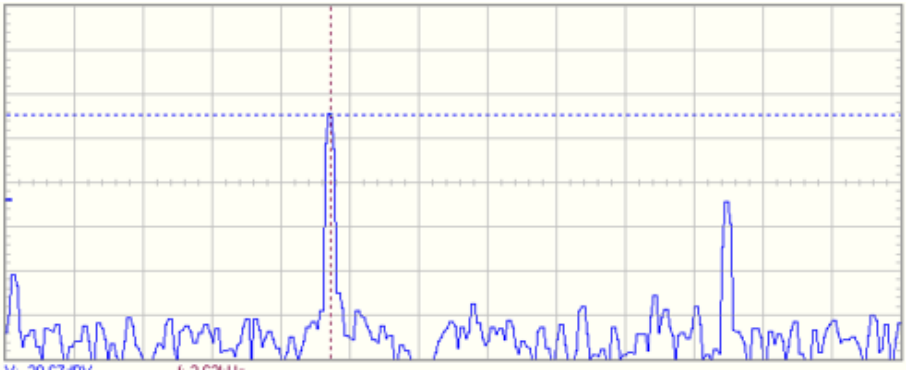


Abbildung 20: Das Spektrum vom Signal mit Bandpassfilter

3. Zusammenfassung und Diskussion

3.1 Diskussion

Die gemessenen Werte für die Zeitkonstante entsprechen den theoretisch zu erwartenden Werten. Die σ-Abweichung liegt innerhalb der 3σ Grenze. Aufgrund der hohen Toleranzen der Widerständen und Kapazitäten, fallen die Fehler für die theoretischen Zeitkonstante relativ groß aus. Dies zieht sich durch groß teil der Auswertung.
Man kann in Aufgabe 2 das Verhalten eines Integrators und eines Differentiators bestätigen. Mit der Hochpass-Messung kann man die Grenzfrequenz, die zu erwarten war, bestätigen. Was die Bestimmung des Verlustwiderstandes betrifft, so fällt die Abweichung der Ergebnisse der zwei Methoden auf. Bei der Methode über die Bandbreite sind die Fehler groß. Die Ergebnisse der Methode über das Verhältnis der effektiven Spannungen jedoch weisen kleinere Fehler auf.
Die Abweichungen bei der Bandbreitenmethode rühren eventuell von der systematisch falschen Annahme her, dass die Verluste einzig in der Spule erfolgen, oder aus der ungenauen graphischen Bestimmung der Bandbreiten, welche auch die großen Fehler erklären könnten. Die großen Fehler kommen auch teilweise dadurch zustande, dass sich der im Verhältnis zur Verlustspannung schon recht große Fehler der ohmschen Widerstände bei der Subtraktion dieser vom Gesamtwiderstand fortpflanzt. Prinzipiell sind die Ergebnisse aber trotz allem noch mit der Erwartung verträglich.
Die Werte die man für die Induktivität bestimmt hat, überstimmen größten Teils über ein. Da hier die Standardabweichung hier nur bei $0,76$ liegt.
Der Gesamtwiderstand, was man aus dem logarithmischen Dekrement, bestimmt hat, stimmt nicht mit den Wert überein den man zuvor in Aufgabe 4 bestimmt hat. Diese Abweichung lässt sich auch durch die falsche Annahme, dass nur die Spule Verluste erzeugt, erklären.
Man kann bei der Signalumformung die Funktionen verschiedene Filter bestätigen und anwenden. Selbst mit dem Bandpassfilter kann man noch eine $100Hz$-Schwingung erkennen. Um ein besseres Filterverhalten zu erreichen, wäre hier die Nutzung von mehreren Filter zu empfehlen

3.2 Fazit

Die Versuchsreihe konnte dazu dienen, die nützlichen Eigenschaften von RCL-Schwingkreisen und ihren Teilkomponenten klarzumachen. Es wurden die Eigenschaften als Hoch- und Tiefpassfilter, als Bandsperre und Bandpassfilter, sowie als Differentiator oder Integrator vermessen: Charakteristische Größen wie Periodendauern, Dämpfungskonstanten oder die elektrischen Parameter der einzelnen Komponenten konnten zuverlässig berechnet und auch experimentell bestimmt werden. Zudem wurden in der Anwendung der konstruierten Schaltungen Signale bereinigt sowie ein AM-Radioempfänger konstruiert.

Insgesamt entsprachen die meisten experimentellen Ergebnisse den theoretischen Erwartungen. War dies einmal nicht der Fall, konnte dies auf behebbare systematische Probleme zurückgeführt werden. Um die Genauigkeit der Ergebnisse zu verbessern, könnten noch bessere Methoden der Datenauswertung verwendet werden, zum Beispiel numerische Fitverfahren o. Ä., um Ungenauigkeiten durch etwa die manuelle Auswertung der Plots zu vermeiden. Auch könnten noch größere beziehungsweise längere Messreihen aufgenommen werden, um durch stärkere Mittelwertbildung die Sicherheit der Ergebnisse zu erhöhen.